

[1]

問 1

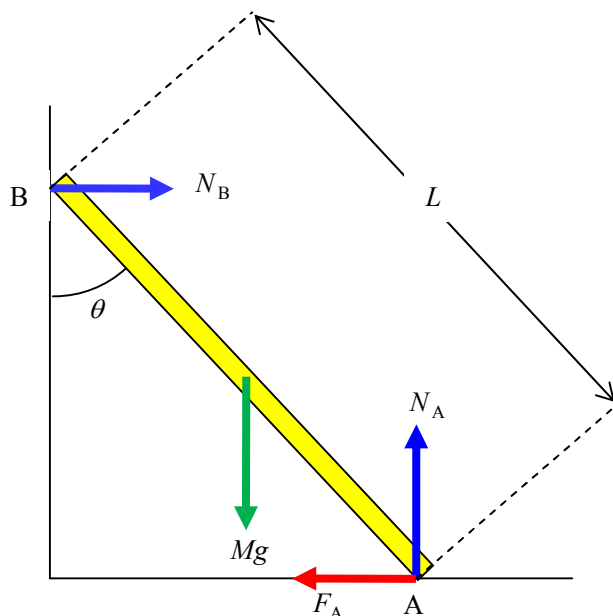
水平成分: $N_B = F_A$

鉛直成分: $N_A = Mg$

問 2

$$N_B L \cos \theta = Mg \cdot \frac{L}{2} \sin \theta$$

解説



図より,

力のつり合い

水平成分: $N_B = F_A$ ……①

鉛直成分: $N_A = Mg$ ……②

棒は細く一様だから,

AB の中点を棒の重心としてよい。

AB の長さは L だから,

点 A のまわりの、棒にはたらく力のモーメントのつり合いの式は,

図より,

$$N_B L \cos \theta = Mg \cdot \frac{L}{2} \sin \theta \quad \dots\dots③$$

問 3

$$2\mu$$

解説

$\theta = \theta_m$ のとき, F_A は最大摩擦力となるから,

$$F_A = \mu N_A$$

これと①, ②より,

$$N_B = \mu Mg$$

よって, 式③は, $\mu MgL \cos \theta_m = Mg \cdot \frac{L}{2} \sin \theta_m$ となる。

$$\therefore \tan \theta_m = \frac{\sin \theta_m}{\cos \theta_m} = 2\mu$$

問 4

$$N_B = \frac{M}{2}(g \tan \theta + a_1)$$

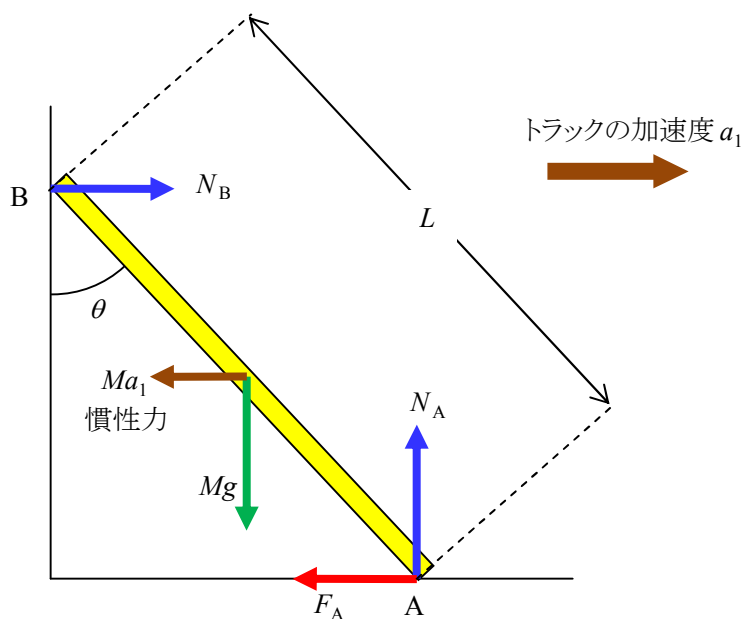
$$F_A = \frac{M}{2}|g \tan \theta - a_1|$$

解説

荷台の上の観測者が見ると, 棒にはたらく力は下図のようになる。

ただし, 摩擦力 F_A の向きは, a_1 が小さいときは慣性力 Ma_1 が小さいため左向き, 大きいときは慣性力 Ma_1 が大きいいため右向きとなる。

したがって, 下図は, a_1 が小さい場合の棒にはたらく力を示したものである。



N_B について

点 A のまわりの棒にはたらく力のモーメントのつり合いより,

$$N_B L \cos \theta = Mg \cdot \frac{L}{2} \sin \theta + Ma_1 \cdot \frac{L}{2} \cos \theta$$

$$\therefore N_B = \frac{M}{2} (g \tan \theta + a_1) \quad \cdots \textcircled{4}$$

F_A について

(i) a_1 が小さいとき

棒は点 A から右へ滑ろうとするから, 摩擦力の向きは左向き

F_A は摩擦力の大きさを表すから, 水平方向の力のつり合いより,

$$N_B = F_A + Ma_1$$

これと④より,

$$F_A = N_B - Ma_1 = \frac{M}{2} (g \tan \theta - a_1) \quad (0 < a_1 \leq g \tan \theta)$$

(ii) a_1 が大きいとき

棒は点 A から左へ滑ろうとするから, 摩擦力の向きは右向き

よって,

$$N_B + F_A = Ma_1$$

これと④より,

$$F_A = -N_B + Ma_1 = \frac{M}{2} (-g \tan \theta + a_1) \quad (g \tan \theta \leq a_1)$$

以上より,

$0 < a_1 \leq g \tan \theta$ のとき

$$F_A = \frac{M}{2} (g \tan \theta - a_1)$$

$a_1 \geq g \tan \theta$ のとき

$$F_A = \frac{M}{2} (-g \tan \theta + a_1)$$

あるいは,

$$F_A = \frac{M}{2} |g \tan \theta - a_1|$$

問 5

$$0 < a_1 \leq g(\tan \theta + 2\mu)$$

解説

(i) 摩擦力の向きが左向きするとき, すなわち $0 < a_1 \leq g \tan \theta$ のとき

$$F_A = \frac{M}{2}(g \tan \theta - a_1)$$

最大摩擦力が μMg だから,

$$\frac{M}{2}(g \tan \theta - a_1) \leq \mu Mg$$

$$\therefore a_1 \geq g(\tan \theta - 2\mu)$$

ここで,

$$\tan \theta - 2\mu \leq \tan \theta_m - 2\mu = 2\mu - 2\mu = 0 \text{ より,}$$

$$g(\tan \theta - 2\mu) \leq 0$$

$$\text{一方, } 0 < a_1 \leq g \tan \theta$$

よって,

$$a_1 \geq g(\tan \theta - 2\mu) \text{ は常に成り立つ。}$$

したがって,

$$0 < a_1 \leq g \tan \theta \text{ のとき,}$$

すなわち摩擦力の向きが左向きときは, 常に荷台に対し静止している。

(ii) 摩擦力の向きが右向きするとき, すなわち $a_1 \geq g \tan \theta$ のとき

$$F_A = \frac{M}{2}(-g \tan \theta + a_1)$$

最大摩擦力が μMg だから,

$$\frac{M}{2}(-g \tan \theta + a_1) \leq \mu Mg$$

$$\therefore a_1 \leq g(\tan \theta + 2\mu)$$

(i), (ii) より,

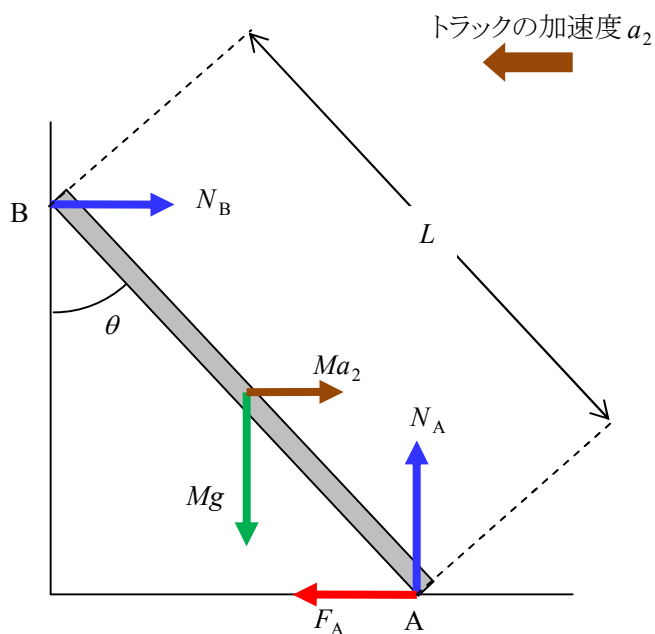
$$0 < a_1 \leq g(\tan \theta + 2\mu)$$

問 6

$$N_B = \frac{M}{2}(g \tan \theta - a_2)$$

$$F_A = \frac{M}{2}(g \tan \theta + a_2)$$

解説



点 A のまわりの棒にはたらく力のモーメントのつり合いより,

$$N_B L \cos \theta + Ma_2 \cdot \frac{L}{2} \cos \theta = Mg \cdot \frac{L}{2} \sin \theta$$

$$\therefore N_B = \frac{M}{2}(g \tan \theta - a_2)$$

水平方向の力のつり合いより,

$$F_A = N_B + Ma_2 = \frac{M}{2}(g \tan \theta + a_2)$$

問 7

棒が荷台に対し静止するとは、

棒が鉛直面と接触し且つ点 A に対し静止していることである。

鉛直面と接触するためには、 $N_B \geq 0$ であればよいから、

$$N_B = \frac{M}{2}(g \tan \theta - a_2) \geq 0$$

$$\therefore a_2 \leq g \tan \theta \quad \dots \textcircled{5}$$

また、

点 A に対し静止するためには、

摩擦力の大きさ F_A が最大摩擦力より大きくなければよいから、

$$F_A = \frac{M}{2}(g \tan \theta + a_2) \leq \mu Mg$$

$$\therefore a_2 \leq g(2\mu - \tan \theta) \quad \dots \textcircled{6}$$

また、問 3 より、 $0 \leq \tan \theta \leq \tan \theta_m = 2\mu$

よって、

⑤と⑥について、

$g \tan \theta \leq g(2\mu - \tan \theta)$ のとき、すなわち $0 \leq \tan \theta \leq \mu$ のとき

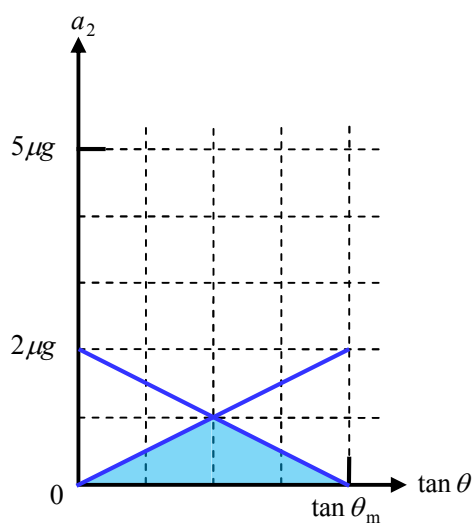
$$a_2 \leq g \tan \theta$$

$g(2\mu - \tan \theta) \leq g \tan \theta$ のとき、すなわち $\mu \leq \tan \theta \leq 2\mu$ のとき

$$a_2 \leq g(2\mu - \tan \theta)$$

問 8

⑤かつ⑥、定義域 $0 \leq \tan \theta \leq \tan \theta_m = 2\mu$ を満たす領域を描けばよい。



〔2〕

問 1

$$q = \frac{\varepsilon_0 A}{d} V$$

解説

LM 間の電気容量は, $\frac{\varepsilon_0 A}{d}$

「発熱がとまった」のは, 抵抗に電流が流れなくなり, ジュール熱が発生しなくなったからである。
電流が流れない抵抗は導体と同じだから, このとき電池の正極と L が等電位になる。

よって, LM 間の電圧は V [V]

$$\text{よって, } q = \frac{\varepsilon_0 A}{d} V$$

問 2

$$\frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

解説

$$q = \frac{\varepsilon_0 A}{d} V \text{ より, 電界の強さ} = \frac{V}{d} = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

補足

電荷 Q がつくる電界の強さ E の一般形

$$E = \frac{Q}{\varepsilon \cdot S}$$

ε は誘電率, S は電界の強さが一様になっている部分の面積

点電荷 Q がつくる電界の強さ

点電荷を中心とする半径 r の球面の電界の強さは一様だから $S = 4\pi r^2$ より,

$$E = \frac{Q}{\varepsilon \cdot 4\pi r^2}$$

長さ l の線分電荷 Q がつくる電界の強さ

線分からの距離が r の円柱の側面の電界の強さは一様だから $S = 2\pi r l$ より,

$$E = \frac{Q}{\varepsilon \cdot 2\pi r l}$$

面積 S' の平板電荷 Q がつくる電界の強さ

平板に垂直で面積 S' の電界が平板の両側にできるから $S = 2S'$ より,

$$E = \frac{Q}{\varepsilon \cdot 2S'}$$

問題の場合, 金属板 L, M がつくる電界はそれぞれ $\frac{q}{\epsilon_0 \cdot 2A}$ であり,

LM 間の電界の向きは両方とも L→M だから,

LM 間の電界の強さは, $\frac{q}{\epsilon_0 \cdot 2A} \times 2 = \frac{q}{\epsilon_0 A}$

問 3

$$\frac{\epsilon_0 A}{2d} V^2$$

解説

$q = \frac{\epsilon_0 A}{d} V$ より, コンデンサーに蓄えられたエネルギー(静電エネルギー)は, $\frac{1}{2} qV = \frac{\epsilon_0 A}{2d} V^2$

補足

極板間の電界と極板の電圧

極板の面積 S , 極板の間隔 d , 誘電率 ϵ_0 の平行板コンデンサーが電荷 Q を蓄えているとき,

電荷 $+Q$ の極板がつくる電界の強さ $E = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 2S}$

電荷 $-Q$ の極板がつくる電界の強さ $E = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 2S}$

極板間では, 両極板がつくる電界の向きは同じだから,

極板間の電界の強さは $E + E = 2E = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot S}$

「電位とは, 電界においた単位電荷(+1C)の静電的位置エネルギー」という約束だから, 電界の強さが $2E$ の一様な空間において電界の向きに距離が d 離れた 2 点の電位差, すなわち極板間の電位差(電圧)は $V = 2Ed \dots \textcircled{1}$

よって, 極板間の電位差 $V = 2Ed = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot S} d$

極板の一方がつくる電界と静電エネルギー

極板間の静電エネルギー(保存力の位置エネルギー) U

= 電荷 $+Q$ が距離 d 離れた電荷 $-Q$ の極板に移動するときの保存力がする仕事 W

電荷 $+Q$ が距離 d 離れた電荷 $-Q$ の極板に移動するとき,

電荷 $+Q$ は, 電荷 $-Q$ の極板がつくる強さ E の電界から

大きさ QE のクーロン力(保存力)を受けて移動する。

よって, 保存力がする仕事 $W = QEd$

よって, 極板間の静電エネルギー $U = QEd$

①より, $Ed = \frac{V}{2}$ だから, 極板間の静電エネルギー $U = \frac{QV}{2}$

問 4

$$\frac{\epsilon_0 A}{2d} V^2$$

解説

電荷移動前の静電エネルギー + 電池がした仕事

= 電荷移動後の静電エネルギー + 抵抗で発生した熱量 (ジュール熱)

電荷移動前の静電エネルギー = 0, 電池がした仕事 = qV

電荷移動前の静電エネルギー = $\frac{qV}{2}$ より,

抵抗で発生した熱量 (ジュール熱) = $qV - \frac{qV}{2} = \frac{qV}{2}$

これと $q = \frac{\epsilon_0 A}{d} V$ より, $\frac{qV}{2} = \frac{\epsilon_0 A}{2d} V^2$

問 5

$$\text{KL 間: } \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad \text{LM 間: } \frac{Q+q}{\epsilon_0 A}$$

解説

金属板 L, M はそれぞれ金属板 K, N の電荷 $+Q$ と $-Q$ から静電誘導を受ける。

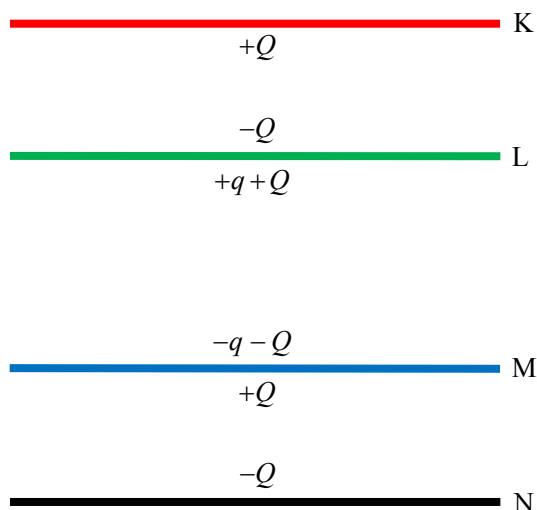
金属板 L, M はそれぞれ孤立しているから, 総電荷 $+q$ と $-q$ が保存される。

より,

金属板 L の K 側と M 側の電荷は, それぞれ $-Q$, $+q+Q$

金属板 M の N 側と L 側の電荷は, それぞれ $+Q$, $-q-Q$

となる。



解法 1: 電気力線の性質とガウスの法則から解く

K の $+Q$ から出た電気力線は L の $-Q$ に入る。

L の $+q+Q$ から出た電気力線は M の $-q-Q$ に入る。

M の $+Q$ から出た電気力線は N の $-Q$ に入る。

よって,

KL 間の電気力線の本数

$+Q$ から出る電気力線の本数と等しい。

電荷 $+Q$ から出る電気力線の本数は, ガウスの法則より, $\frac{Q}{\epsilon_0}$ 本

LM 間の電気力線の本数

$+q+Q$ から出る電気力線の本数と等しいから, ガウスの法則より, $\frac{Q+q}{\epsilon_0}$ 本

MN 間の電気力線の本数

$+Q$ から出る電気力線の本数と等しいから, ガウスの法則より, $\frac{Q}{\epsilon_0}$ 本

金属板の面積が A だから, 単位面積あたりの電気力線の密度は,

KL 間: $\frac{Q}{\epsilon_0 A}$ (本/m²), LM 間: $\frac{Q+q}{\epsilon_0 A}$ (本/m²), MN 間: $\frac{Q}{\epsilon_0 A}$ (本/m²)

電気力線の密度が E (本/m²) のときの電界の強さを E とするから,
電界の強さは,

KL 間: $\frac{Q}{\epsilon_0 A}$, LM 間: $\frac{Q+q}{\epsilon_0 A}$, MN 間: $\frac{Q}{\epsilon_0 A}$

解法 2: それぞれの極板がつくる電界ベクトルの和から解く

問 2 補足より, 面積 S' の平板電荷 Q がつくる電界の強さ $= E = \frac{Q}{\epsilon \cdot 2S'}$

よって,

金属板 K がつくる電界の強さ $=$ 金属板 N がつくる電界の強さ $= \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 2A}$

金属板 L がつくる電界の強さ $=$ 金属板 M がつくる電界の強さ $= \frac{q}{\epsilon_0 \cdot 2A}$

次に, 各金属板がつくる電界ベクトルを図のように色分けする。

KL 間の電界の強さ

$+q$ がつくる電界と $-q$ がつくる電界が打ち消し合うため,

金属板 K がつくる電界の強さと金属板 N がつくる電界の強さだけが残る。

よって, $2 \times \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 2A} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$

LM 間の電界の強さ

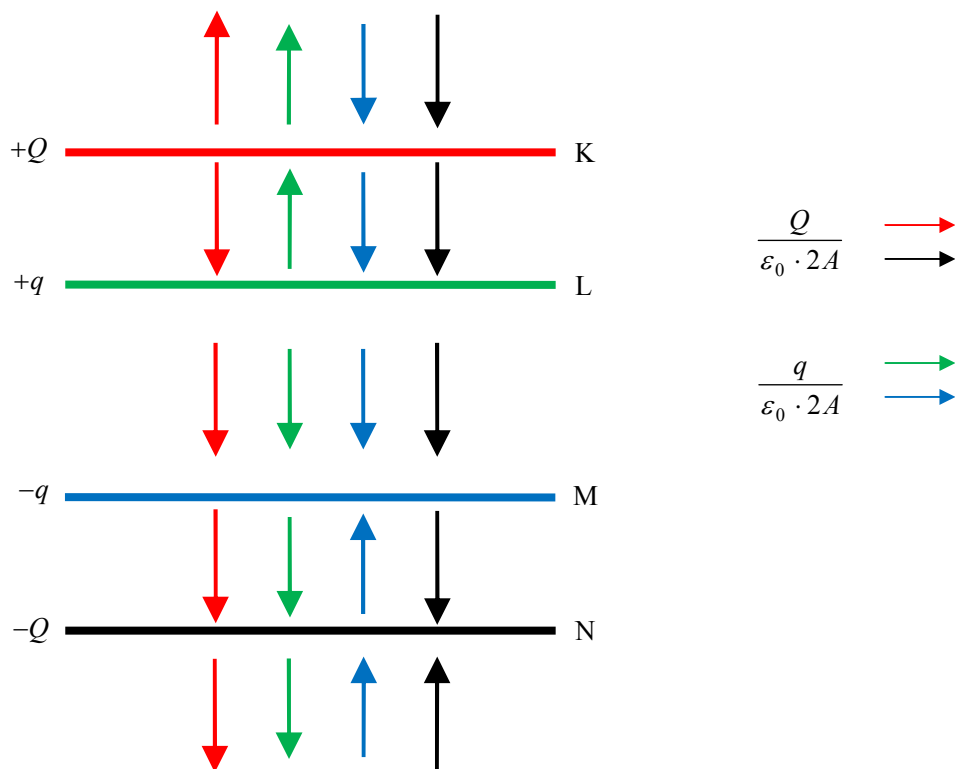
各金属板がつくる電界の向きが同じだから、

$$2 \times \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 2A} + 2 \times \frac{q}{\epsilon_0 \cdot 2A} = \frac{Q+q}{\epsilon_0 A}$$

MN 間の電界の強さ

+q がつくる電界と -q がつくる電界が打ち消し合うため、
金属板 K がつくる電界の強さと金属板 N がつくる電界の強さだけが残る。

$$\text{よって、} 2 \times \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 2A} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$



問 6

$$\frac{QD + qd}{\epsilon_0 A}$$

解説

電池 B2 の起電力 = N に対する K の電位

だから,

N に対する K の電位を求めればよい。

また, N に対する K の電位は,

N に対する M の電位 + M に対する L の電位 + L に対する K の電位

で与えられるから,

まず, それぞれの電位を求めると,

N に対する M の電位

問 5 解説より, 電界の向きは M → N で, その強さが $\frac{Q}{\epsilon_0 A}$ だから,

MN 間の距離を x とすると, N に対する M の電位は, $\frac{Q}{\epsilon_0 A} x$

M に対する L の電位

問 5 解説より, 電界の向きは L → M で, その強さが $\frac{Q+q}{\epsilon_0 A}$, LM 間の距離が d だから,

M に対する L の電位は, $\frac{Q+q}{\epsilon_0 A} d$

L に対する K の電位

問 5 解説より, 電界の向きは K → L で, その強さが $\frac{Q}{\epsilon_0 A}$ だから,

KL 間の距離を y とすると, L に対する K の電位は, $\frac{Q}{\epsilon_0 A} y$

よって, N に対する M の電位は,

$$\begin{aligned} \frac{Q}{\epsilon_0 A} x + \frac{Q+q}{\epsilon_0 A} d + \frac{Q}{\epsilon_0 A} y &= \frac{Q}{\epsilon_0 A} (x+y) + \frac{Q+q}{\epsilon_0 A} d \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0 A} (D-d) + \frac{Q+q}{\epsilon_0 A} d \\ &= \frac{QD + qd}{\epsilon_0 A} \end{aligned}$$

問 7

$$q' = q - Q$$

解説

解法1

金属板 L と金属板 M をデフォルメすると、次のようになる。

つまり、金属板 K の電荷 $+Q$ と金属板 L の金属板 K 側の電荷 $-Q$

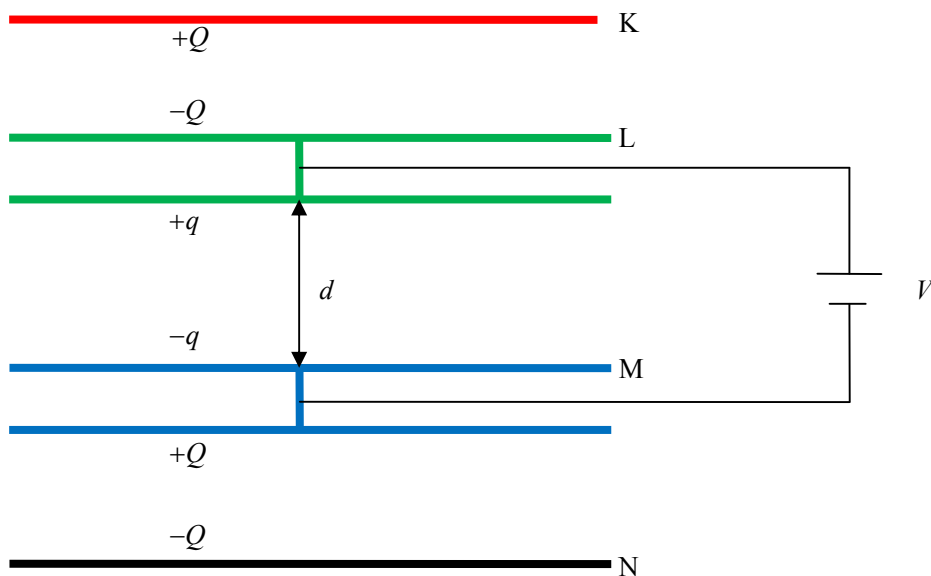
および、金属板 N の電荷 $-Q$ と金属板 M の金属板 N 側の電荷 $+Q$ は、

静電気力で引き合うため、静止し続ける。

一方、金属板 L と金属板 M 側と金属板 M の金属板 L 側は、

電池 B1 により、再充電され、それぞれの電荷が $+q$ と $-q$ になる。

よって、金属板 L に蓄えられた電荷 $q' = q - Q$



解法 2

問 5 の解法 2 より、LM 間の電界の強さは
$$\frac{Q}{\epsilon_0 A} + \frac{q'}{\epsilon_0 A}$$

これと LM 間の距離 $= d$ より、LM 間の電圧 $= \frac{Q + q'}{\epsilon_0 A} d$

スイッチ S1 が閉じられているから、LM 間の電圧 = 電池 B1 の起電力 $= V$ より、

$$\frac{Q + q'}{\epsilon_0 A} d = V \quad \therefore q' = \frac{\epsilon_0 A}{d} V - Q$$

これと問 1 より、 $q = \frac{\epsilon_0 A}{d} V$ よって、 $q' = q - Q$

問 8

$$\Delta Q = \frac{d}{D-d} Q$$

$$\Delta q' = -\frac{d}{D-d} Q$$

解説

解法 1

問 5 解法 2 と同様にして, LM 間の電界の強さ = $\frac{Q + \Delta Q}{\epsilon_0 A} + \frac{q' + \Delta q'}{\epsilon_0 A}$

これと LM 間の距離 = d より, LM 間の電圧 = $\frac{Q + \Delta Q + q' + \Delta q'}{\epsilon_0 A} d$

スイッチ S1 が閉じられているから, LM 間の電圧 = 電離 B1 の起電力 = V より,

$$V = \frac{Q + \Delta Q + q' + \Delta q'}{\epsilon_0 A} d$$

$$V = \frac{q}{\frac{\epsilon_0 A}{d}} = \frac{q}{\epsilon_0 A} d \text{ と } q' = q - Q \text{ (問 7) より, } V = \frac{Q + q'}{\epsilon_0 A} d$$

(または問 7 の解法 2 より, $V = \frac{Q + q'}{\epsilon_0 A} d$)

$$\text{よって, } \frac{Q + \Delta Q + q' + \Delta q'}{\epsilon_0 A} d = \frac{Q + q'}{\epsilon_0 A} d$$

よって, $\Delta Q + \Delta q' = 0 \dots \textcircled{2}$

KN 間の電位差は, 問 6 で求めた KN 間の電位差 $\frac{QD + qd}{\epsilon_0 A}$ の

Q を $Q + \Delta Q$, q を $q' + \Delta q'$ で置き換えることにより, $\frac{(Q + \Delta Q)D + (q' + \Delta q')d}{\epsilon_0 A}$

スイッチ S2 が閉じられているから, この電位差と B2 の起電力は等しい。

よって,

$$\frac{(Q + \Delta Q)D + (q' + \Delta q')d}{\epsilon_0 A} = \frac{QD + qd}{\epsilon_0 A}$$

$$\therefore \Delta QD + q'd + \Delta q'd = qd$$

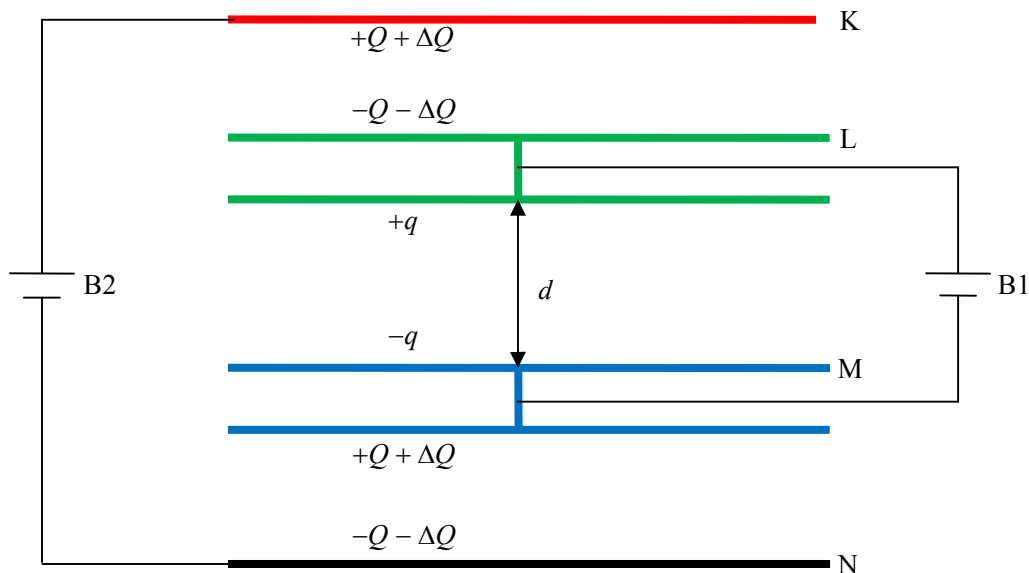
$$\therefore \Delta QD + \Delta q'd = (q - q')d$$

問 7 より, $q' = q - Q$ だから,

$$\Delta QD + \Delta q'd = Qd \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より, } \Delta Q = \frac{d}{D-d} Q, \Delta q' = -\frac{d}{D-d} Q$$

解法 2



金属板 L と金属板 M 側と金属板 M の金属板 L 側との間の電圧と電気容量は一定だから、それぞれの電荷 $+q$ と $-q$ は変わらない。

金属板 L の金属板 K 側と金属板 M の金属板 N 側は静電誘導により、それぞれの電荷が、 $-Q - \Delta Q$ と $Q + \Delta Q$ になる。

よって、 $q' + \Delta q' = +q - Q - \Delta Q \quad \therefore \Delta q' = -q' + q - Q - \Delta Q$

これと、問 7 より、 $q' = q - Q$ だから、 $\Delta q' = -\Delta Q \cdots \textcircled{4}$

また、KN 間の電位差は、

問 5 の解法 1 より、KL 間の電界の強さ = MN 間の電界の強さ = $\frac{Q + \Delta Q}{\epsilon_0 A}$ となるから、

$$\text{KL 間の電圧} + \text{MN 間の電圧} = \frac{Q + \Delta Q}{\epsilon_0 A} (D - d)$$

$$\text{これと MN 間の電圧} = \text{電池 B1 の起電力} = V = \frac{q}{\epsilon_0 A} = \frac{qd}{\epsilon_0 A} \text{ より、} \frac{Q + \Delta Q}{\epsilon_0 A} (D - d) + \frac{qd}{\epsilon_0 A}$$

$$\text{これが、問 6 で求めた } \frac{QD + qd}{\epsilon_0 A} \text{ と等しいから、} \frac{Q + \Delta Q}{\epsilon_0 A} (D - d) + \frac{qd}{\epsilon_0 A} = \frac{QD + qd}{\epsilon_0 A}$$

$$\therefore \Delta Q = \frac{d}{D - d} Q$$

$$\text{これを} \textcircled{4} \text{ に代入すると、} \therefore \Delta q' = -\frac{d}{D - d} Q$$

[3]

I

(1)

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_1} f_0$$

解説

音源が時間 Δt の間に発した波面の数と
時間 Δt_1 の間に O に届いた波面の数が等しいから、

$$f_0 \Delta t = f_1 \Delta t_1 \quad \therefore f_1 = \frac{\Delta t}{\Delta t_1} f_0$$

(2)

$$\frac{c}{c-v}$$

解説

$$AO = AA' + A'O \text{ より, } ct_1 = v\Delta t + c(t_1 + \Delta t_1 - \Delta t) \quad \therefore (c-v)\Delta t = c\Delta t_1 \quad \therefore \frac{\Delta t}{\Delta t_1} = \frac{c}{c-v}$$

(3)

$$\frac{c}{c-v} f_0$$

解説

$$(1), (2) \text{ より, } f_1 = \frac{c}{c-v} f_0$$

II

(4)

$$ct_0 + (c+w)(t_2 - t_0)$$

(5)

$$c(t_0 - \Delta t) + (c+w)(t_2 + \Delta t_2 - t_0)$$

図 2 の場合、風速 w の向きは観測者の向きだから、音速 = $w + c$

$$\text{よって, } AO = ct_0 + (c+w)(t_2 - t_0)$$

$$\text{同様に, } A'O = c(t_0 - \Delta t) + (c+w)(t_2 + \Delta t_2 - t_0)$$

(6)

$$\frac{c+w}{c-v}$$

解説

$$\begin{aligned}
 AO &= ct_0 + (c+w)(t_2 - t_0), \quad A'O = c(t_0 - \Delta t) + (c+w)(t_2 + \Delta t_2 - t_0), \quad AA' = v\Delta t \text{ より,} \\
 ct_0 + (c+w)(t_2 - t_0) &= v\Delta t + c(t_0 - \Delta t) + (c+w)(t_2 + \Delta t_2 - t_0) \\
 \therefore ct_0 + (c+w)(t_2 - t_0) &= v\Delta t + ct_0 - c\Delta t + (c+w)(t_2 - t_0) + (c+w)\Delta t_2 \\
 \therefore (v-c)\Delta t &= (c+w)\Delta t_2 \\
 \therefore \frac{\Delta t}{\Delta t_2} &= \frac{c+w}{c-v}
 \end{aligned}$$

(7)

$$\frac{c+w}{c-v} f_0$$

解説

時間 Δt の間に音源が発した波面の数と
時間 Δt_2 の間に O に届いた波面の数が等しいから,

$$f_0 \Delta t = f_2 \Delta t_2 \quad \therefore f_2 = \frac{\Delta t}{\Delta t_2} f_0$$

$$\text{これと } \frac{\Delta t}{\Delta t_2} = \frac{c+w}{c-v} \text{ より, } f_2 = \frac{c+w}{c-v} f_0$$

(8)

$$\frac{c+w}{c+w-v} f_0$$

解説

音源が O を通過する前の音速は $c+w$ になっているから,

$$(3) \text{ の音速 } c \text{ を } c+w \text{ にすることにより, } f_2' = \frac{c+w}{c+w-v} f_0$$

実際,

音源が O を通過する前の時刻 $t = t_n$ に発した音が O に届いた時刻を t_{n+1} ,
時刻 $t = t_n + \Delta t$ に発した音が観測者 O に届いた時刻を $t_{n+1} + \Delta t_n$ とすると,

$$(c+w)(t_{n+1} - t_n) = v\Delta t + (c+w)\{t_{n+1} + \Delta t_n - (t_n + \Delta t)\} \text{ より, } \frac{\Delta t}{\Delta t_n} = \frac{c+w}{c+w-v} \quad \dots \textcircled{1}$$

時間 Δt の間に音源が発した波面の数と時間 Δt_n の間に O に届いた波面の数が等しいから,

$$f_0 \Delta t = f_2' \Delta t_n \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } f_2' = \frac{c+w}{c+w-v} f_0$$

III

(9)

$$wt_3$$

(10)

$$ct_3$$

解説

波面は媒質の運動の向き(風の向き)に速さ w で運ばれながら、
波面の中心から速さ c で広がっていく。

(11)

$$\sqrt{c^2 - w^2} t_3$$

解説

$$\sqrt{BO^2 - AB^2} = \sqrt{c^2 t_3^2 - w^2 t_3^2} = \sqrt{c^2 - w^2} t_3$$

(12)

$$\frac{\sqrt{c^2 - w^2}}{\sqrt{c^2 - w^2} - v} f_0$$

解説

$$AO = AA' + A'O \text{ より,}$$

$$\sqrt{c^2 - w^2} t_3 = v \Delta t + \sqrt{c^2 - w^2} \{(t_3 + \Delta t_3) - \Delta t\}$$

$$\therefore \sqrt{c^2 - w^2} \Delta t_3 = (\sqrt{c^2 - w^2} - v) \Delta t$$

$$\therefore \frac{\Delta t}{\Delta t_3} = \frac{\sqrt{c^2 - w^2}}{\sqrt{c^2 - w^2} - v} \quad \dots \textcircled{1}$$

音源が時間 Δt の間に発した波面の数と
時間 Δt_3 の間に O に届いた波面の数が等しいから、

$$f_0 \Delta t = f_3 \Delta t_3 \quad \therefore f_3 = \frac{\Delta t}{\Delta t_3} f_0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より、

$$f_3 = \frac{\sqrt{c^2 - w^2}}{\sqrt{c^2 - w^2} - v} f_0$$

風が吹くときの音の伝わる速さと観測者の位置の関係

無風のときの音が伝わる速さを V_0 , 一定方向に速さ w の風が吹いているとする。

音(波面)は, 媒質(空気)という乗り物(風)に速さ w 運ばれながら,
その媒質(空気)中を速さ V_0 で伝わる(広がる)。

「風が吹く・吹かない」とは, 「媒質(空気)という乗り物が動く・動かない」ということである。

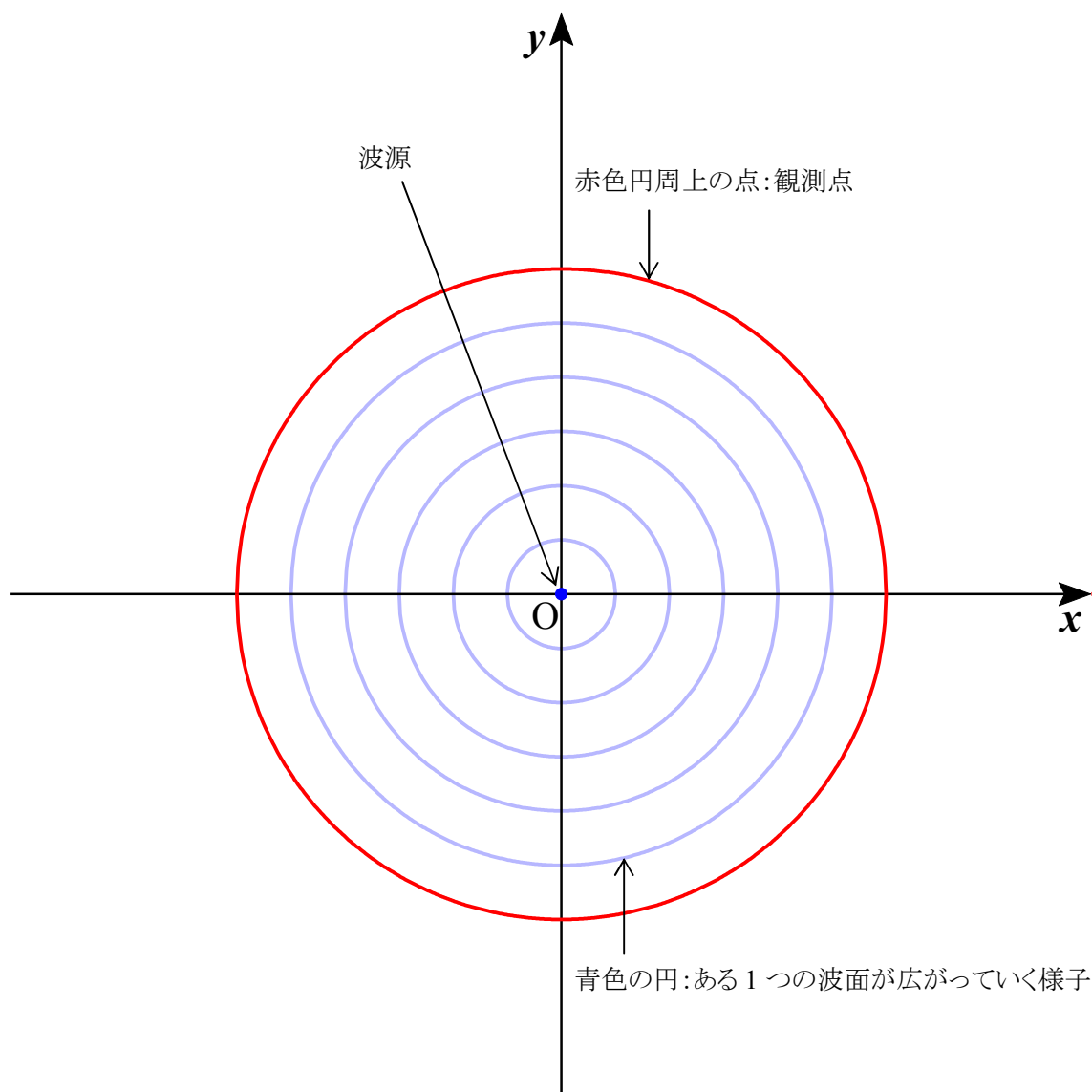
よって, 音が観測者に伝わる速さを V とすると,

V は, 媒質中を音が伝わる速さ(波面が広がる速さ) V_0 と媒質の運動(風)の速度で決まる。

そこで, 音が風で運ばれる様子を, ある 1 つの波面が風に運ばれ広がっていく場合で考えよう。

無風するとき

赤色の円周上の任意の観測者に到達する波面の半径は同じである。



一定方向に速さ w の風が吹いているとき

x 軸方向に速さ w の風が吹いており、時刻 $t = 0$ のとき波源から 1 つの波面が出たとすると、時刻 t における波面の中心の座標 $(wt, 0)$ 、波面の半径 $= V_0 t$ より、

$$\text{波面の方程式は、} (x - wt)^2 + y^2 = (V_0 t)^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

よって、観測点 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ まで波面が到達するのにかかる時間 t を求めるには、

①に $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ を代入し、この方程式を解けばよい。

$$(r \cos \theta - wt)^2 + (r \sin \theta)^2 = (V_0 t)^2 \text{ より、}$$

$$r^2 \cos^2 \theta - 2rw \cos \theta \cdot t + w^2 t^2 + r^2 \sin^2 \theta = V_0^2 t^2$$

$$\therefore (V_0^2 - w^2) t^2 + 2rw \cos \theta \cdot t - r^2 = 0 \quad (t \geq 0)$$

$$\therefore t = \frac{-rw \cos \theta + \sqrt{r^2 w^2 \cos^2 \theta + r^2 (V_0^2 - w^2)}}{V_0^2 - w^2}$$

$$= \frac{-rw \cos \theta + r \sqrt{V_0^2 - w^2 (1 - \cos^2 \theta)}}{V_0^2 - w^2}$$

$$\therefore t = \frac{r}{V_0^2 - w^2} \left(-w \cos \theta + \sqrt{V_0^2 - w^2 \sin^2 \theta} \right) \quad \cdots \textcircled{1}$$

また、無風のとき、波面が到達するのにかかる時間を t_0 とすると、 $t_0 = \frac{r}{V_0} \quad \cdots \textcircled{2}$

観測点 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ に波面が到達するのにかかる時間 t は、

無風のときの $\frac{t}{t_0}$ 倍であるから、 $V = \frac{t_0}{t} V_0$ となる。

よって、①、②より、

$$V = \frac{t_0}{t} V_0$$

$$= \frac{\frac{r}{V_0}}{\frac{r}{V_0^2 - w^2} \left(-w \cos \theta + \sqrt{V_0^2 - w^2 \sin^2 \theta} \right)} V_0$$

$$= \frac{V_0^2 - w^2}{-w \cos \theta + \sqrt{V_0^2 - w^2 \sin^2 \theta}}$$

以上より、

x 軸方向に速さ w の風が吹いているとき、観測点 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ で観測する音速 V は、

$$V = \frac{V_0^2 - w^2}{-w \cos \theta + \sqrt{V_0^2 - w^2 \sin^2 \theta}}$$

である。

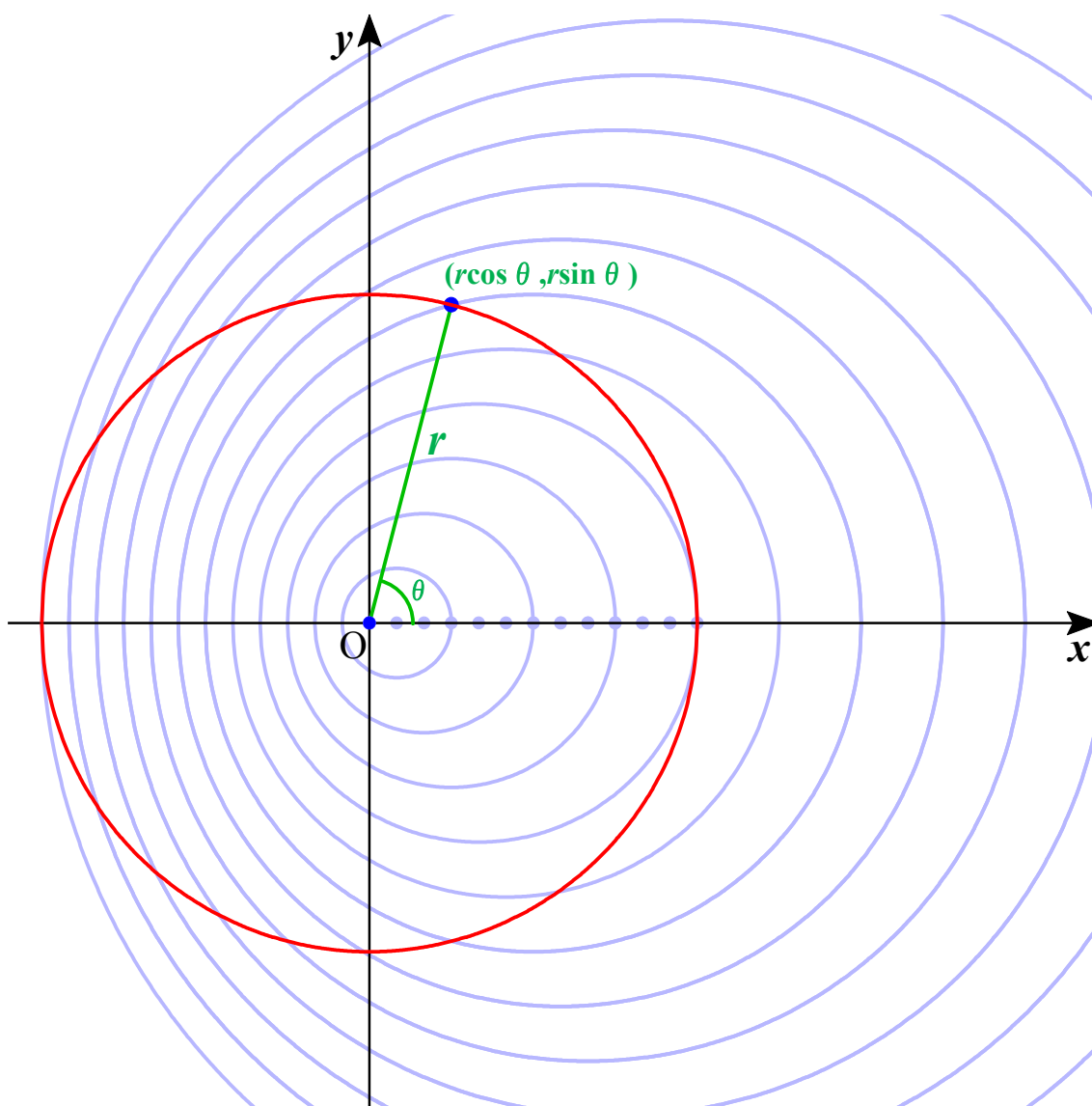
よって,

$$\theta = 0 \text{ のとき, } V = \frac{V_0^2 - w^2}{-w + V_0} = V_0 + w$$

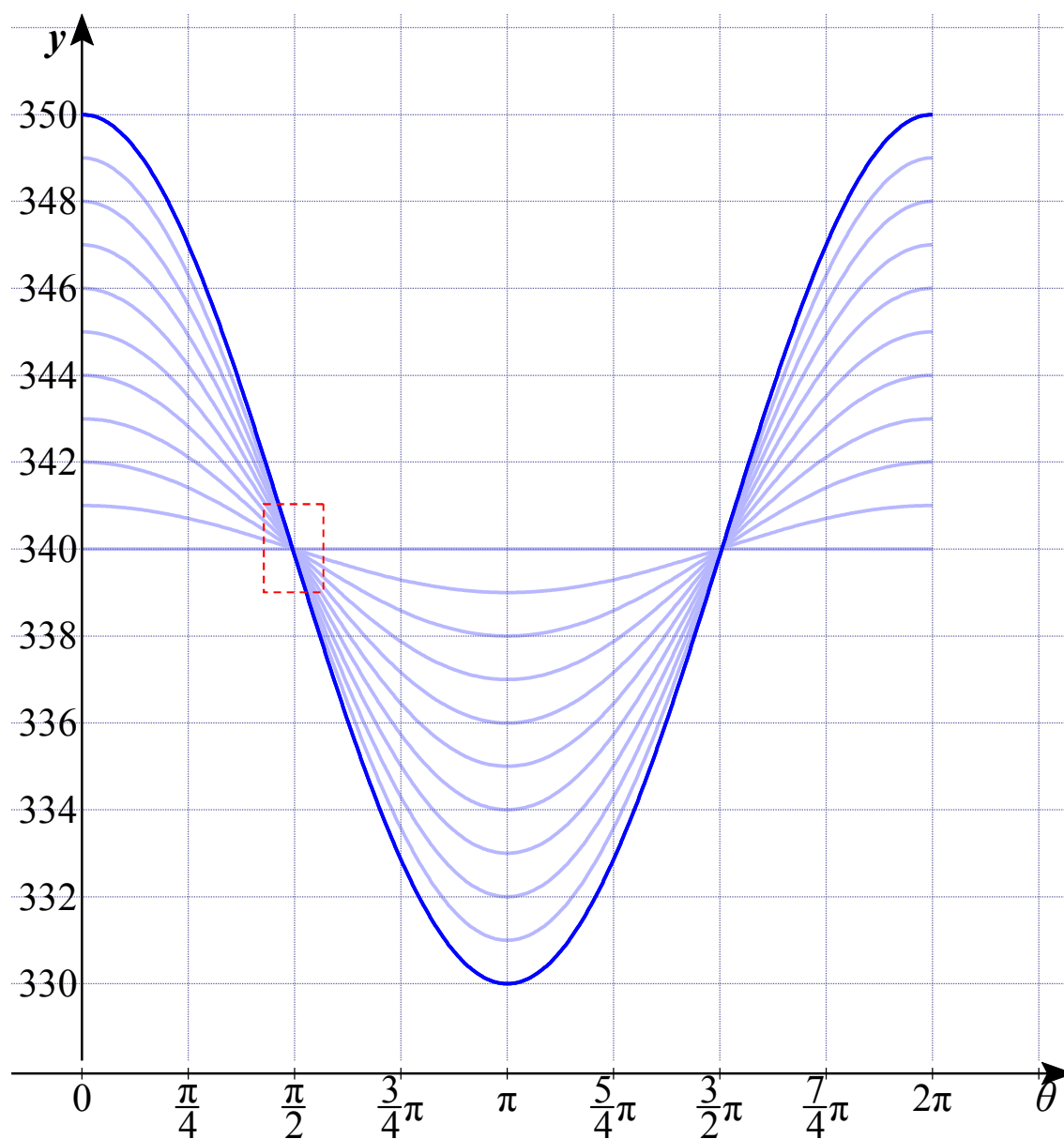
$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき, } V = \frac{V^2 - w^2}{-\frac{w}{\sqrt{2}} + \sqrt{V^2 - \frac{w^2}{2}}} = \frac{\sqrt{2}(V^2 - w^2)}{-w + \sqrt{2V^2 - w^2}}$$

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } V = \frac{V_0^2 - w^2}{\sqrt{V_0^2 - w^2}} = \sqrt{V_0^2 - w^2}$$

$$\theta = \pi \text{ のとき, } V = \frac{V_0^2 - w^2}{w + V_0} = V_0 - w$$



$V_0 = 340 \text{ m/s}$ とし, w を 0m/s から 10m/s まで 1m/s ずつ変化させていくと, 次図のようになる。



このグラフからだと, $\left(\frac{\pi}{2}, 340\right)$ と $\left(\frac{3}{2}\pi, 340\right)$ が定点であるとの誤解を招きかねないので, 赤色破線で囲まれた枠内を拡大してみる。

